

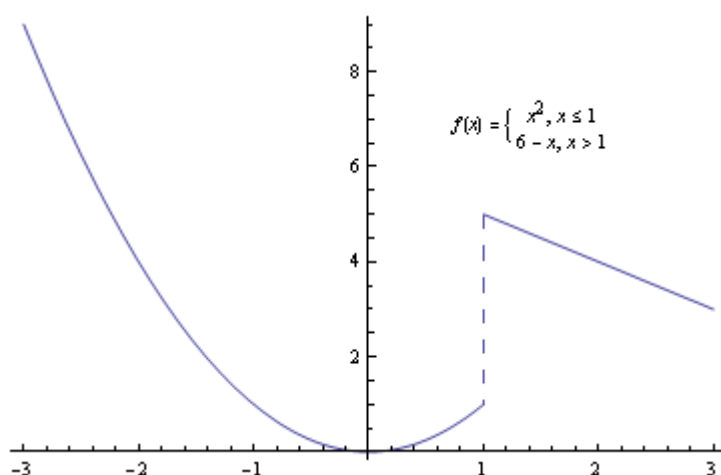


VIDEO CORRELATI ALLE DISCONTINUITÀ

<http://youtu.be/Kf31FdU6TSM>

<http://youtu.be/bBAiZhfh4>

Discontinuità 1: Discontinuità del primo tipo



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \Delta l = |l_1 - l_2|$$

Le discontinuità del primo tipo sono anche chiamate di salto sono anche chiamate **discontinuità semplici**

Sia data una **funzione** del tipo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 6 - x, & x > 1 \end{cases}$$

Possiamo considerarla come due funzioni separate: una definita per x minore o uguale a 1 e un'altra funzione definita per x maggiore di 1.

È utile pensarla in questo modo quando usiamo l'integrazione, la differenziazione e altri strumenti matematici simili.

Tuttavia, come è scritto, f è una singola funzione, poiché è definita a tratti. Si noti che la funzione aderisce alla nostra definizione di continua.

I due tratti assumono un valore diverso in $x = 1$, e possiamo osservare dal grafico che la nostra funzione f sembra "saltare" da un ramo all'altro. Questo salto rende la funzione discontinua. Ci riferiamo a questo come **discontinuità di salto**.

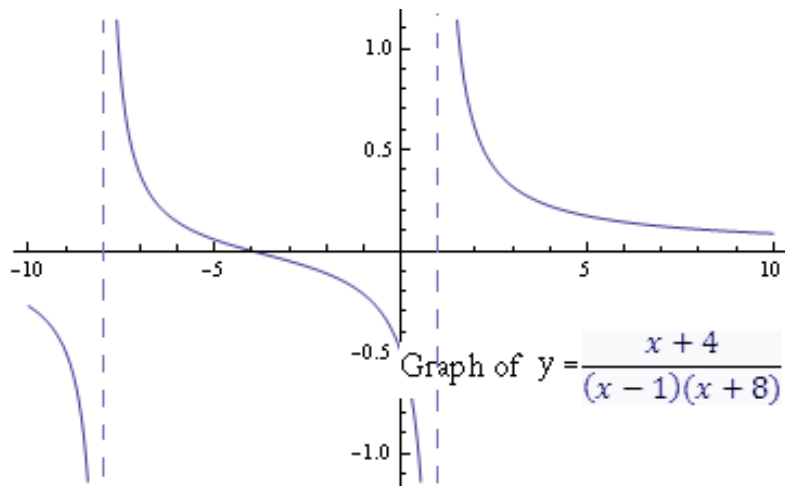
Si noti che la discontinuità della funzione dipende interamente dal valore dei due rami della funzione. Per questo motivo, non possiamo semplicemente guardare una funzione a tratti e vedere immediatamente se c'è una discontinuità di salto.

Le discontinuità di salto si verificano quando la funzione assume due valori diversi quando x tende ad avvicinarsi al punto di discontinuità. Nel nostro esempio, sul lato destro di $x = 1$, la funzione si avvicina al valore $f(1) = 5$. Sul lato sinistro di $x = 1$, la funzione si avvicina al valore $f(1) = 1$. Pertanto, ha una discontinuità di salto. Formalmente, possiamo



verificarlo controllando se il **limite sinistro** e il **destro** della funzione corrispondono allo stesso valore in un dato punto.

Discontinuità 2: Discontinuità del secondo tipo o asintotiche



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$$

Nella funzione, $f(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+8)}$ sappiamo che il dominio è limitato a tutti i numeri reali tranne 1 e -8.

Spesso, i punti più interessanti in una funzione sono i punti problematici, e infatti, possiamo vedere nel grafico che la funzione si comporta in modo molto strano in corrispondenza dei valori in cui non è definita.

Quando ci avviciniamo a $x = 1$ abbiamo che la funzione tende ad avvicinarsi sempre di più ad una retta verticale (tende ad assumere un valore sempre più grande) senza incontrarla mai (si dice che $f(x)$ sarà tangente a tale retta all'infinito). Tali rette rappresentano gli **asintoti**; sono valori per i quali la funzione non assume mai un valore preciso. Gli asintoti che vediamo con questa funzione sono chiamati **asintoti verticali** perché sono linee verticali.

In generale, gli **asintoti si verificano quando una funzione tende ad assumere un valore infinito per x che tende ad assumere un certo valore di x , normalmente sono i valori che annullano il denominatore di una funzione fratta oppure i valori esclusi dal dominio di una logaritmica.**

Discontinuità 3: Discontinuità di terza specie o eliminabile

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c) \text{ or it doesn't exist}$$

Questo tipo di punto di discontinuità è anche chiamato **discontinuità eliminabile**.

A volte ci imbattiamo in funzioni definite in modo diverso per un certo valore di x .



Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ x^2, & \text{all other real } x - \text{values.} \end{cases}$$

Abbiamo definito il valore della funzione $y=1$ in $x = 3$, ma il resto della funzione dipende da $f(x) = x^2$. Possiamo vedere nel grafico che la funzione è continua tranne per $x = 3$. È discontinua in un singolo punto e questa discontinuità è chiamata **discontinuità puntuale**.

In generale, le **discontinuità puntuali si verificano quando una funzione è definita specificamente per un valore x isolato**. Tuttavia, questo non garantisce una discontinuità nel punto. Ad esempio, se cambiamo leggermente la nostra funzione in

$$f(x) = \begin{cases} 9, & x = 3 \\ x^2, & \text{all other real } x - \text{values} \end{cases}$$

essa diventa continua. Questo perché abbiamo definito il valore della funzione in $f(3) = 9$ e precisamente come il valore che la funzione $f(x) = x^2$ avrebbe assunto per $x = 3$.

Le discontinuità puntuali sorgono anche quando la nostra funzione ha un denominatore che si annulla per un certo valore di x . Ma tale valore annulla contemporaneamente anche il numeratore. Ad esempio nella funzione:

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-2}.$$

Se proviamo a trovare il valore della funzione in $x = 2$, otteniamo $f(2) = \frac{2^2(2-2)}{2-2} = \frac{0}{0}$.

$0/0$ rappresenta un numero indefinito, ovvero la funzione non esiste in quel punto. Tuttavia, se restringiamo la funzione a un dominio che non include $x = 2$, possiamo semplicemente

semplificare $\frac{(x-2)}{(x-2)}$ ed ottenere $f(x) = x^2$.

Questo ci permette di definire la funzione come

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-2)} = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ \text{undefined}, & x = 2. \end{cases}$$

Abbiamo effettivamente rimosso la discontinuità per mostrare che la funzione si comporta esattamente come $f(x) = x^2$, tranne che in $x = 2$, dove non è definita.

In conclusione, **le discontinuità puntuali si verificano anche quando possiamo semplificare un termine al denominatore e al numeratore**.