



TEORIA SUI LIMITI

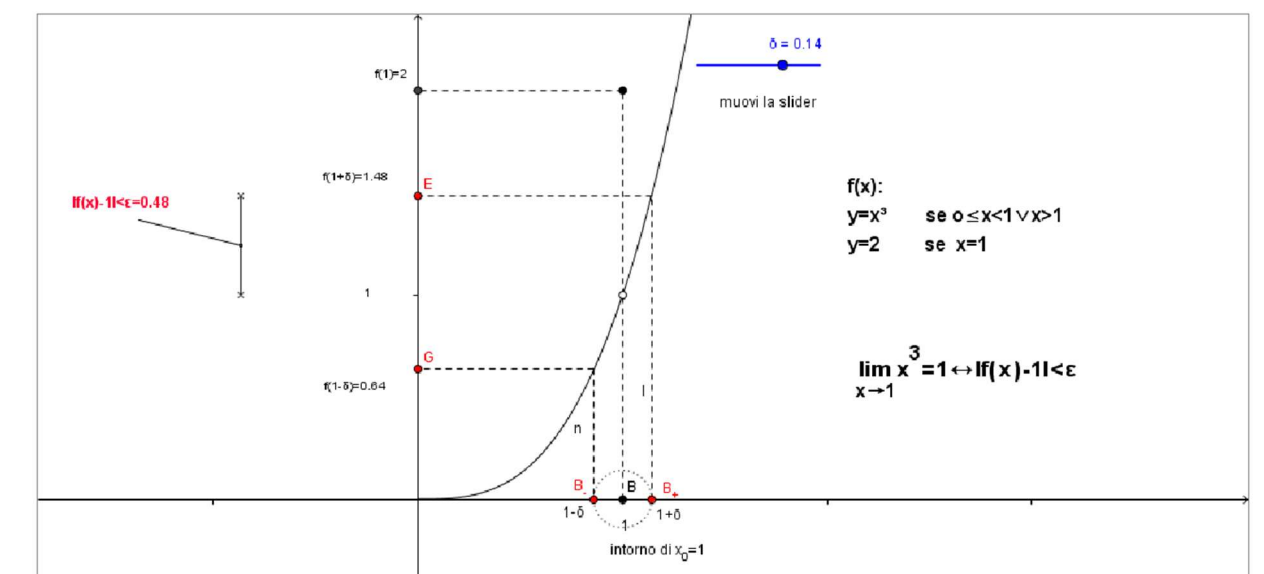
DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Si dice che , per x che tende a c , la funzione $y=f(x)$ ha per limite l e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ x \in I(c) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:

Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intorno completo I del punto c , escluso al più il punto c . Si dice che, per x tendente a c , la funzione $y=f(x)$ ha per limite l se: comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, si può determinare in corrispondenza di esso un intorno completo I_ε di c , contenuto in I , tale che, per ogni x appartenente a tale intorno (escluso al più $x=c$) si abbia che $|f(x)-l|<\varepsilon$.



ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ se e solo se qualunque x appartenente ad un $I(c)$, escluso al più $x=c$, si ha che $|f(x)-l| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e molto piccolo.

ESEMPIO:

verificare che $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = 3$; deve risultare $|x^2 - 1 - 3| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, si ha:

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < +\varepsilon \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2 - 4 - \varepsilon \\ x^2 - 4 + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - (4 - \varepsilon) < 0 \\ x^2 - (4 + \varepsilon) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{4+\varepsilon} & -\sqrt{4-\varepsilon} & \sqrt{4-\varepsilon} & \sqrt{4+\varepsilon} \\ & \text{*****}x\text{*****}x\text{*****}x\text{*****}x\text{*****} \\ & X & & & \\ & \text{-----}x\text{*****}x\text{*****}x\text{*****}x\text{*****} \end{aligned}$$

$x \in (\sqrt{4-\varepsilon}; \sqrt{4+\varepsilon})$, intorno completo di $x=2$, c.v.d.



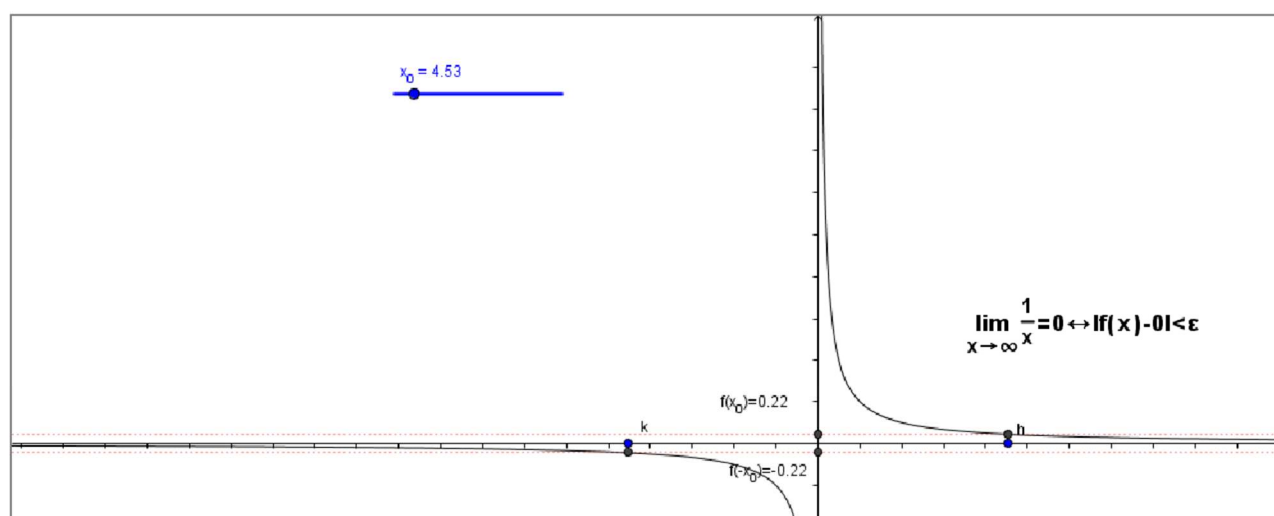
DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO

Si dice che , per x che tende a infinito, la funzione $y=f(x)$ ha per limite l e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ x \in I(\infty) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:

Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intorno I di infinito. Si dice che, per x tendente all'infinito la funzione $y=f(x)$ ha per limite l se: comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, si può determinare in corrispondenza di esso un intorno di infinito, contenuto in I , tale che, per ogni x appartenente a tale intorno si abbia che $|f(x) - l| < \varepsilon$.



Muovi la slider facendo variare x_0 ed osserva come varia la differenza tra $f(x)$ e il valore del limite.

PROF. SSA MAIOLINO DANIELA, Creato con [GeoGebra](#)

ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ se e solo se qualunque x appartenente ad un $I(\infty)$ si ha che $|f(x) - l| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e molto piccolo.

ESEMPIO:

verificare che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = 1$; deve risultare $\left| \frac{x-1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ in un intorno di $x=2$; si ha

$$\left| \frac{x-1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-1}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > +\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon} \right) \cup \left(+\frac{1}{\varepsilon}; +\infty \right) \Rightarrow x \in I(\infty), \text{ c.v.d.}$$

**DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE FINITO**

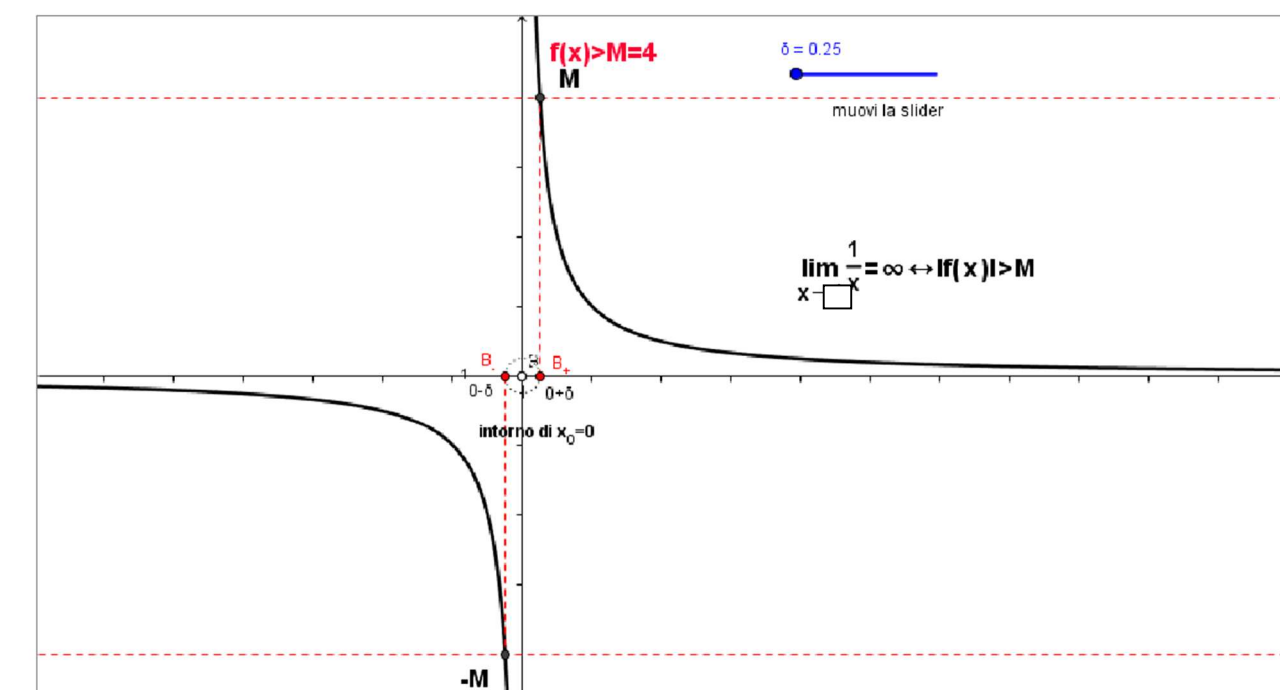
Si dice che, per x che tende ad un valore finito, la funzione $y=f(x)$ ha per limite infinito e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| > M \\ x \in I(c) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:

Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intorno completo I del punto c , con esclusione al più del punto c . Si dice che, per x tendente a c la funzione $y=f(x)$ ha per limite infinito se:

comunque si scelga un numero $M > 0$, arbitrariamente grande, si può determinare in corrispondenza a esso un intorno completo di c , contenuto in I , tale che, per ogni x appartenente a tale intorno (escluso al più $x=c$) si abbia che $|f(x)| > M$.

**ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE**

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ se e solo se qualunque x appartenente ad un $I(c)$, escluso al più $x=c$, si ha che $|f(x)| > M$ con $\forall M > 0$ e molto grande.

ESEMPIO:

verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$; deve risultare $\left| \frac{1}{x} \right| > M \quad \forall M > 0 \Rightarrow$ un intorno di infinito; si ha

$$\left| \frac{1}{x} \right| > M \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M \Rightarrow |x| < \frac{1}{M} \Rightarrow -\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{M}; +\frac{1}{M} \right) \Rightarrow x \in I(0), \text{ c.v.d.}$$

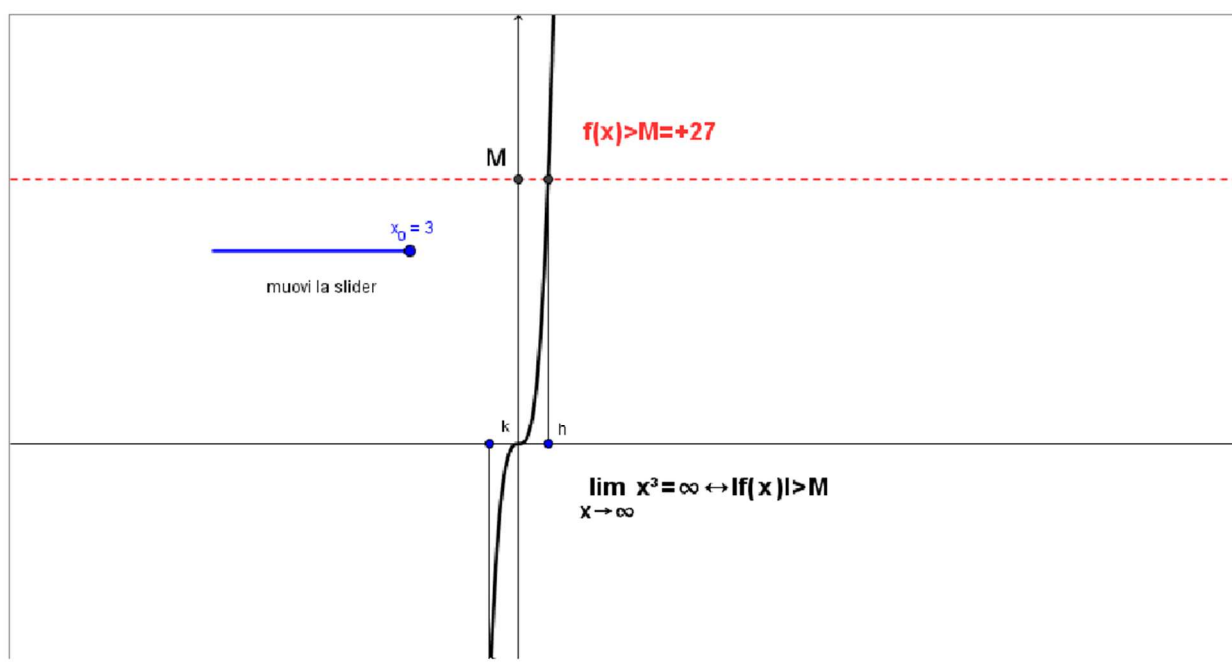
**DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE AD UN VALORE INFINITO**

Si dice che, per x che tende ad un valore finito, la funzione $y=f(x)$ ha per limite infinito e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| > M \\ x \in I(\infty) \end{cases}$$

DEFINIZIONE:

Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intorno I di infinito, si dice che, per x tendente a infinito la funzione $y=f(x)$ ha per limite infinito se: comunque si scelga un numero $M>0$, arbitrariamente grande, si può determinare in corrispondenza a esso un intorno di infinito tale che, per ogni x appartenente a tale intorno si abbia $|f(x)|>M$.

**ESEMPIO DI VERIFICA DI UN LIMITE**

Per verificare se il risultato di un limite è corretto basta applicare la definizione, ovvero

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ se e solo se qualunque x appartenente ad un $I(\infty)$ si ha che $|f(x)| > M$ con $M>0$ e molto grande.

ESEMPIO:

verificare che $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$; deve risultare $|x^3| > M \quad \forall M>0 \Rightarrow$ un intorno di infinito; si ha

$$|x^3| > M \Rightarrow x^3 < -M \vee x^3 > +M \Rightarrow x < \sqrt[3]{-M} \vee x > \sqrt[3]{+M} \Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-M}) \cup (\sqrt[3]{+M}; +\infty) \Rightarrow x \in I(\infty), \text{ c.v.d.}$$



TEOREMI SUI LIMITI

T: unicità del limite

Se per x che tende a c , finito o infinito, $\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = l$, si ha che questo limite è unico.

T: della permanenza del segno

Se $\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = \pm l \neq 0$ esiste un intorno di c per tutti i punti del quale, escluso al più c , i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite ovvero $f(x) > 0$, se $l > 0$ oppure $f(x) < 0$ se $l < 0$.

T1C: primo teorema del confronto

Se risulta $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = \pm l$ e $\lim_{x \rightarrow \pm c} h(x) = \pm l$ allora anche $\lim_{x \rightarrow \pm c} g(x) = \pm l$

T2C: secondo teorema del confronto

Se risulta $|f(x)| \leq |g(x)|$ e $\lim_{x \rightarrow \pm c} g(x) = 0$ allora anche $\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = 0$

T3C: terzo teorema del confronto

Se risulta $|g(x)| \geq |f(x)|$ e $\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = \pm \infty$ allora anche $\lim_{x \rightarrow \pm c} g(x) = \pm \infty$

ESEMPIO T2:

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$

Com'è noto $|\sin x| \leq 1$ per cui anche $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ovviamente con $x \neq 0$. Se moltiplichiamo ambo i membri per

$|x|$ si ha $|x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \cdot |x|$ da cui $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ ma $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ da cui per il secondo teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

ESEMPIO T3:

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} [2^x \cdot \sin x + 2]$

Com'è noto $\sin x \geq -1$ per cui aggiungendo $+2$ si ha $\sin x + 2 \geq -1 + 2$ da cui $\sin x + 2 \geq 1$, moltiplicando ambo i membri per 2^x si ha $2^x \cdot \sin x + 2 \geq 2^x$ e poiché entrambi i membri sono senz'altro positivi si avrà

$|2^x \cdot \sin x + 2| \geq |2^x|$; ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$ allora per il terzo teorema del confronto sarà anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin x + 2 = \infty$$



FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE: Una funzione di equazione $y=f(x)$ si dice continua in un punto c quando esiste il limite della funzione per x tendente a c e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, cioè quando si verificano le seguenti condizioni:

- 1) $f(c)=l$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = l$

Sono continue le funzioni:

valori di continuità

○ Costanti	$f(x)=k$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ Lineari	$f(x)=x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ irrazionali con indice pari	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$x \geq 0$
○ irrazionali con indice dispari	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ esponenziali	$f(x) = a^x \quad a > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ logaritmiche	$f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ goniometriche	$f(x)=\sin x; f(x)=\cos x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
○ goniometriche	$f(x)=\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
○ goniometriche	$f(x)=\cot x$	$x \neq k\pi$

come si vede ogni funzione è continua nel proprio dominio.

CALCOLO DEI LIMITI DI FUNZIONI CONTINUE

I limiti delle funzioni continue si possono calcolare sostituendo al posto della x il valore a cui tendono.

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3^x = f(3) = 3^2 = 9$$

TEOREMA: Limite della somma di due funzioni:

siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che ammettono, per x che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed l_2 , allora il limite della somma delle due funzioni esiste ed è la somma dei loro limiti:

$$\lim(f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x)= l_1+l_2$$

Si possono avere i seguenti casi:

- a) $\lim (f(x)+k) = l_1+k$
- b) $l_1=+\infty$ ed $l_2=+\infty$ $\lim (f+g)=+\infty + \infty = +\infty$
- c) $l_1=-\infty$ ed $l_2=-\infty$ $\lim (f+g)=-\infty - \infty = -\infty$
- d) $l_1=k$ ed $l_2=+\infty$ $\lim (f+g)=k + \infty = +\infty$
- e) se dalla somma risulta $[+\infty - \infty]$ si ha una **FORMA INDETERMINATA**.

**SOMMA E DIFFERENZE DI FUNZIONI CONTINUE SONO FUNZIONI CONTINUE.****TEOREMA: Limite del prodotto di due funzioni:**

siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che ammettono, per x che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed l_2 , allora il limite del prodotto di due funzioni esiste ed è il prodotto dei loro limiti:

$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = l_1 \cdot l_2$$

Si possono avere i seguenti casi:

f) $\lim (k f(x)) = k l$

g) $l_1 = +\infty$ ed $l_2 = +\infty$ $\lim (f+g) = +\infty * +\infty = +\infty$

h) $l_1 = -\infty$ ed $l_2 = -\infty$ $\lim (f+g) = -\infty * (-\infty) = +\infty$

i) $\lim (f(x))^n = l^n$

j) se dal prodotto risulta $[0 \cdot \infty]$ si ha una **FORMA INDETERMINATA**.

IL PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO E' UNA FUNZIONE CONTINUA NELLO STESSO INTERVALLO.

$\Rightarrow$ Le **funzioni razionali intere** ovvero i polinomi di grado n sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Limite di una potenza: $\lim f(x)^n = (\lim f(x))^n$

$\Rightarrow$ Limite del reciproco di una funzione: $\lim \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} \quad \text{con } l \neq 0$

TEOREMA: Limite del quoziente di due funzioni:

siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che ammettono, per x che tende a c (c finito o infinito), limiti finiti l_1 ed $l_2 \neq 0$, allora il limite del quoziente due funzioni esiste ed è il quoziente dei loro limiti:

$$\lim(f(x)/g(x)) = \lim f(x) / \lim g(x) = l_1 / l_2$$

Si possono avere i seguenti casi:

k) $\lim \frac{k}{f(x)} = \frac{k}{l} \quad \text{con } l \neq 0 \quad \frac{k}{\infty} \rightarrow 0 \quad ; \quad \frac{k}{0} \rightarrow \infty$

l) Se $l_1 = k \neq 0$ ed $l_2 = 0 \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k}{0} \rightarrow \infty$

m) Se $l_1 = \infty$ ed $l_2 = l \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{l} \rightarrow \infty$ anche se $l=0$

n) Se $l_1 = k$ ed $l_2 = \infty \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k}{\infty} \rightarrow 0$

o) $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0 \quad ; \quad \frac{1}{0} \rightarrow \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{k} \rightarrow \infty$



p) Se dal quoziente risulta $\left[\begin{array}{c} \infty \\ | \\ \infty \end{array} \right] e \left[\begin{array}{c} 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right]$ si hanno **FORME INDETERMINATE**.

IL QUOZIENTE DI FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO I E' UNA FUNZIONE CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DELLO STESSO INTERVALLO IN CUI RISULTA $g(x) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Le funzioni razionali fratte sono continue per tutti i valori di x che non annullano il denominatore.

COME SI RISOLVONO ALCUNE FORME INDETERMINATE

Quando, nella risoluzione di un limite, si ottiene come risultato una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ o $0 \cdot \infty$, si può calcolare il limite mettendo in pratica una “trasformazione” algebrica della funzione o

scomponendo e semplificando. Riassumiamo i casi più comuni:

CASO 1: limite per x che tende all'infinito di una funzione razionale di grado n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

Se si trova la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si raccoglie la x di grado massimo e si ha che il limite da calcolare è uguale al limite del termine di grado massimo ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

CASO 2: limite per x che tende ad un valore finito di una funzione fratta; se si trovano le forme

indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ allora si devono scomporre numeratore e denominatore e semplificare la frazione,

prima di ricalcolare il limite.

CASO 3: limite per x che tende all'infinito di una funzione fratta; se si trovano le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ o

$\frac{0}{0}$ allora si deve raccogliere la x di grado massimo sia al numeratore che al denominatore e si ha che il

limite sarà uguale al limite del rapporto dei termini di grado massimo.



RIEPILOGO ASINTOTI

L'asintoto è una retta, a cui la curva che rappresenta la funzione nel piano cartesiano, si avvicina sempre di più, senza toccarla mai (si dice che la curva è tangente all'asintoto all'infinito).

Possono esistere tre tipi di asintoti:

ASINTOTI VERTICALI

di equazione $y = \pm C$

Esistono soprattutto per le funzioni fratte e si trovano per quei i valori che annullano il denominatore; se esiste, l'asintoto verticale, si trova quando il limite per x che tende ad un valore finito, tende all'infinito ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \pm c} f(x) = \pm \infty$$

ASINTOTI ORIZZONTALI

di equazione $y = \pm C$

Se esiste, l'asintoto orizzontale, si trova quando il limite per x che tende all'infinito, tende ad un valore finito ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm c$$

ASINTOTI OBLIQUI

di equazione $y = mx + q$

Se esiste, l'asintoto obliquo, si trova quando il limite per x che tende all'infinito, tende ad un valore infinito ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

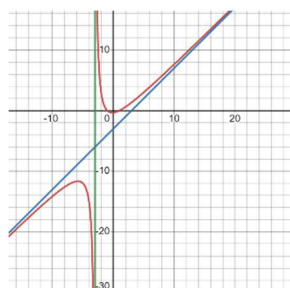
In tal caso se nel calcolo dei limiti si ottiene questo risultato, si deve procedere calcolando prima il coefficiente angolare e poi l'ordinata all'origine q

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm c \quad \text{con } c \neq \infty \quad (\text{il coefficiente angolare non può essere infinito})$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx] = \pm c$$

ovviamente se $m=0$, l'asintoto è orizzontale e se $q=0$ la retta asintotica passa per l'origine degli assi cartesiani.

Nel grafico che segue possiamo vedere che la funzione presenta un asintoto verticale ed un asintoto obliquo.





MATESCUOLA.IT

Prof.ssa D. Maiolino