



TEORIA SULLE DERIVATE – PARTE PRIMA

Al fine di perfezionare lo studio del grafico di una funzione è necessario introdurre lo studio dell'andamento della derivata prima, per poterne calcolare gli intervalli di crescita e decrescenza e per poter individuare gli eventuali punti stazionari (dove la derivata prima si annulla), e della derivata seconda per poter studiare le concavità.

Sia data una funzione $f(x)$ definita nel suo Dominio D . Rappresentiamo di tale funzione una parte del suo grafico, e su tale arco consideriamo un punto P di coordinate $(x_0; f(x_0))$ e un punto Q di coordinate $(x_0 + h; f(x_0 + h))$, che sottendono una retta secante r . Il segmento PQ ha coefficiente

angolare $m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e tale rapporto è detto RAPPORTO

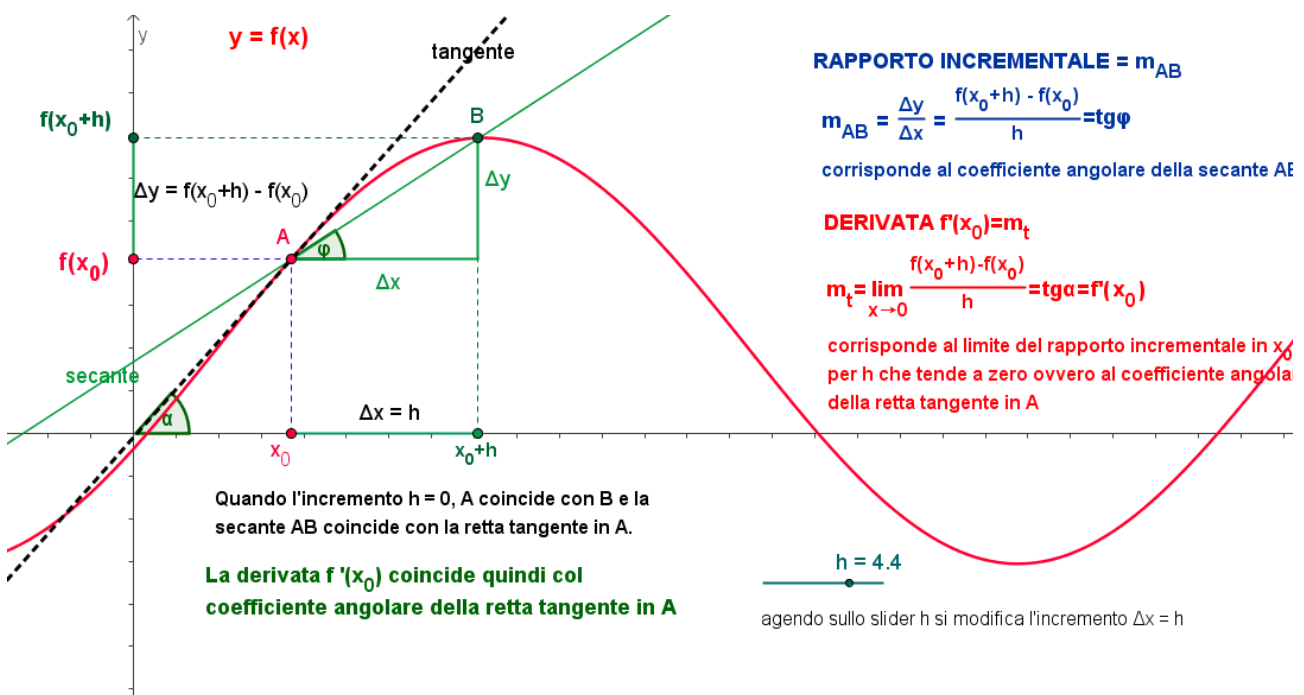
INCREMENTALE, perché rappresenta il rapporto tra ordinate ed ascisse quando l'ascissa subisce un incremento $\Delta x = h$ (ricordiamo che il coefficiente angolare di una retta permette di calcolare l'inclinazione della retta rispetto l'asse x , infatti detto α l'angolo che la retta forma con l'asse x si

ha tang $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$). Diamo quindi la:

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Si definisce DERIVATA $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

La DERIVATA di una funzione in un punto x_0 è il limite, se esiste, del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento dato alla variabile indipendente.





Procediamo quindi spiegando il :

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Tornando ancora alla rappresentazione dell'arco di curva PQ chiamiamo t la tangente alla curva nel punto P che avrà coefficiente angolare m_t . Se facciamo tendere h a zero si avrà che il segmento PQ tenderà a coincidere con la tangente e quindi

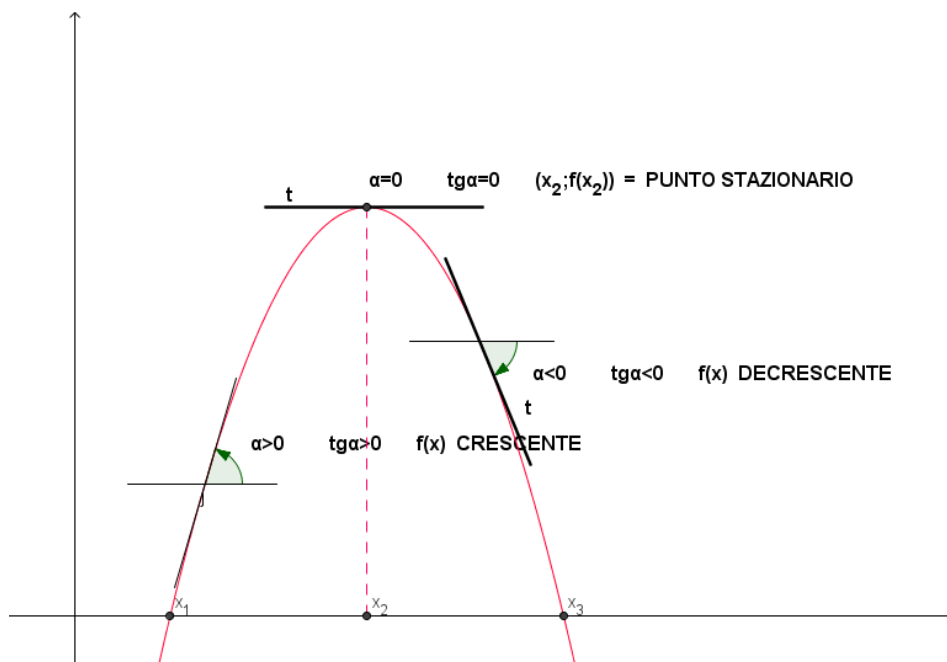
$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ma tale limite è per definizione uguale alla derivata ne consegue che

LA DERIVATA RAPPRESENTA PER $x=x_0$ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO P.

Studiando quindi come varia l'inclinazione della tangente e quindi la derivata per tutti i punti di definizione della curva possiamo capire il suo andamento, ovvero se il valore della derivata prima in un certo intervallo è:

$f'(x) > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow$ la funzione è crescente

$f'(x) < 0 \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow$ la funzione è decrescente



Si dice che $x=c$ è un punto di MAX relativo per la funzione $f(x)$ in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \leq f(c)$

Si dice che $x=c$ è un punto di min relativo per la funzione $f(x)$ in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \geq f(c)$

Si dice che $x=c$ è un punto di Flesso per la funzione $f(x)$ se in tale punto la curva cambia concavità.



PUNTI DI NON DERIVABILITA'

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ la tangente è orizzontale $\Rightarrow$ la funzione per $x = x_0$ ha un PUNTO STAZIONARIO M , mo F a tg

$f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow$ la tangente è verticale $\Rightarrow$ la funzione per $x = x_0$ ha un FLESSO a tangente verticale

$f'_-(x_0) = \pm\infty \vee f'_+(x_0) = \mp\infty \Rightarrow$ ma $f'(x_0)$ non esiste $\Rightarrow$ la funzione per $x = x_0$ ha un PUNTO DI CUSPIDE

$f'_-(x_0) = l_1 \vee f'_+(x_0) = l_2 \Rightarrow$ ma $f'(x_0)$ non esiste $\Rightarrow$ la funzione per $x = x_0$ ha un PUNTO ANGOLOSO

