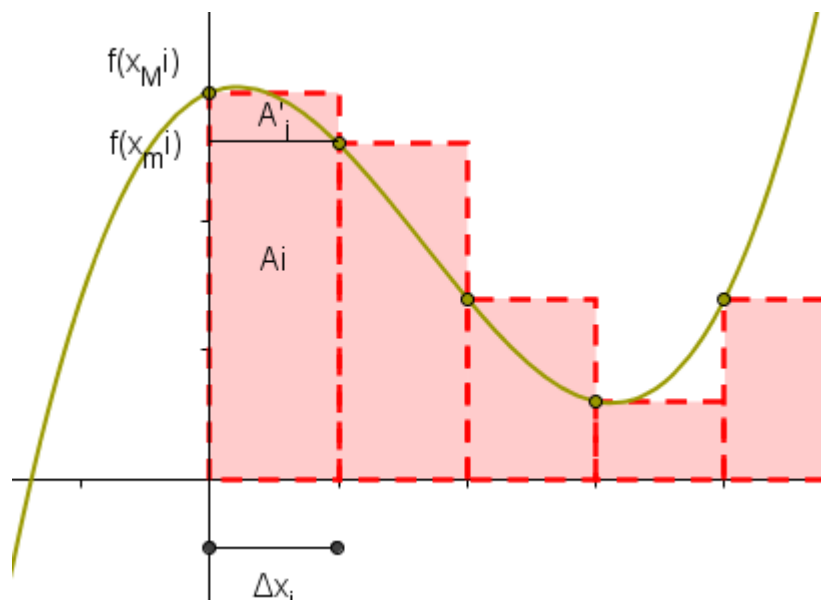




INTEGRALE DEFINITO

Il problema che portò all'istituzione del calcolo degli integrali fu quello di determinare l'area delle superfici piane limitate da contorni curvilinei.

SIGNIFICATO GEOMETRICO:



[FILE.GGB](#)

Sia data $y=f(x)$ definita nell'intervallo $[a;b]$ e ivi continua. Dividiamo tale intervallo in n parti e dai punti di ascissa $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ conduciamo le rette parallele all'asse y fino ad incontrare la curva, in modo da poter costruire in ogni striscia che si viene a determinare un rettangolo inscritto alla curva di ampiezza Δx_i e di altezza $f(x_{mi})$ ordinata minima, ed un rettangolo circoscritto alla curva di altezza $f(x_{Mi})$ ordinata massima.

Chiamiamo TRAPEZOIDE il trapezio delimitato dalle rette per a e b , dalla curva $f(x)$ e dal segmento avente per estremi l'intervallo a, b .

L'insieme dei rettangoli inscritti e circoscritti prende il nome di PLURIRETTANGOLO..

Poiché $f(x)$ è continua, lo sarà anche in ogni intervallino di ampiezza Δx_i e per il teorema di Weierstrass ammetterà un massimo $[x_{Mi}; f(x_{Mi})]$ ed un minimo di coordinate $[x_{mi}; f(x_{mi})]$.

L'area del generico rettangolo A_i inscritto è dato da

$$A_i = \Delta x_i \cdot f(x_{mi})$$

e di quello circoscritto

$$A'_i = \Delta x_i \cdot f(x_{Mi})$$

da cui l'area totale del plurirettangolo inscritto è

$$S_{\text{inscr}} = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot f(x_{mi})$$

e quella del plurirettangolo circoscritto è

$$S_{\text{circ}} = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot f(x_{Mi})$$

Se indichiamo con S l'area del trapezoide allora sarà

$$S_{\text{inscr}} \leq S \leq S_{\text{circ}}$$



Consideriamo una suddivisione del trapezoide infinita allora si avrà $\Delta_{xi} \rightarrow 0$ e i due plurirettangoli, inscritti e circoscritti, tenderanno ad avere la stessa area del trapezoide che al limite per n che tende all'infinito coinciderà con l'area del trapezoide stesso, quindi

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{inscr}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{circ.}}$ vero anche per il teorema del confronto.

Tale limite sarà indicato con il seguente simbolo:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{detto INTEGRALE DEFINITO di } f(x)$$

con a estremo inferiore e b estremo superiore di integrazione.

SEGNO DELL'INTEGRALE DEFINITO

Il segno dell'integrale dipende solo dal segno di f(x). Si possono avere tre casi:

1) se $f(x) > 0$ in $[a; b]$ allora $S = \int_a^b f(x) dx > 0$

2) se $f(x) < 0$ in $[a; b]$ allora $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx > 0$

3) se f(x) cambia di segno in $[a; b]$ allora esisterà un punto di ascissa c in cui sarà $f(c)=0$ e quindi

potremo suddividere $S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \pm \int_c^b f(x) dx$

LEGAME TRA INTEGRALE DEFINITO ED INDEFINITO DI UNA FUNZIONE

Teorema di Torricelli - Barrow

Ritornando al trapezoide, consideriamo un qualunque punto t appartenente all'intervallo $[a; b]$. Si definisce FUNZIONE INTEGRALE DI f(x) $S(t) = \int_a^t f(x) dx$ dipendente da t variabile indipendente.

Se $t=a$ allora $S(t) = \int_a^a f(x) dx = S(a) = 0$

Se $t=b$ allora $S(t) = \int_a^b f(x) dx = S(b) = S$.

Il teorema di Torricelli - Barrow dice che:

la derivata della funzione integrale, calcolata in un punto qualunque dell'intervallo $[a; b]$, è uguale al valore che la funzione integranda assume in quel determinato punto quindi $S'(t)=f(t)$.

Dimostrazione:

Consideriamo un incremento h di t positivo e piccolo a piacere in modo che t+h appartiene ancora ad $[a; b]$ ed inoltre in modo che nell'intervallo $[t; t+h]$ la funzione f(x) o è crescente o decrescente ed il massimo ed il minimo della funzione coincidono con gli estremi della stessa nell'intervallo.

Avremo:

$S_{\text{inscr}} \leq S \leq S_{\text{circ}}$ da cui $h * f(t) \leq S \leq h * f(t+h)$ ma



$S = \int_a^{t+h} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = S(t+h) - S(t)$ per cui sostituendo nella relazione precedente e dividendo tutto per h si ottiene:

$f(t) \leq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq f(t+h)$. Se $h \rightarrow 0$ allora $\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t)$ ed applicando il teorema del confronto alla relazione precedente si ha

$\lim_{h \rightarrow 0} f(t) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(t+h)$ e quindi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = f(t)$ ed ancora per definizione di derivata $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = S'(t)$

e quindi $S'(t) = f(t)$ c.v.d.

Da questo teorema ne consegue che: $S(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + C$ è una primitiva di $f(x)$ ovvero

$$D[F(x) + C] = f(x).$$

Abbiamo così trovato la relazione che lega l'integrale definito a quello indefinito, perchè abbiamo dimostrato che derivando $S(x)$ otteniamo la funzione integranda, ovvero S è una primitiva dell'integrale, così come succedeva per gli integrali indefiniti.

Se $x=a$ allora $S(a) = \int_a^a f(x) dx = F(a) + C = 0$

Se $x=b$ allora $S(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) + C$.

e sottraendo membro a membro si ha:

$$S(b) - S(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

da cui la regola:

l'integrale definito è uguale alla differenza che la funzione primitiva assume agli estremi dell'intervallo di integrazione

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$